# ANNALI

## DELLA FACOLTA' DI AGRARIA DELL'UNIVERSITA'

## SASSARI



# studi sassaresi

ORGANO UFFICIALE
DELLA SOCIETÀ SASSARESE DI SCIENZE MEDICHE E NATURALI

Istituto di Zootecnica dell'Università di Sassari
(Direttore: Prof. *M. Dattilo*)

Istituto di Matematica e Fisica dell'Università di Sassari
(Direttore inc.: Prof. *L. Schiffini*)

Cattedra di Zootecnica Generale
(Titolare: Prof. *G. Rossi*)

**A. CAPPIO-BORLINO[1] - G. MARRAS[2] - G. PULINA[3] - G. ROSSI[4]**

# SCELTA DI UN MODELLO ALGEBRICO SEMPLICE PER IL CALCOLO DEGLI SCAMBI ENERGETICI NELLE BOVINE IN LATTAZIONE

## RIASSUNTO

Negli anni recenti sono stati elaborati diversi modelli matematici sia di tipo «meccanicistico» che «empirico» per descrivere gli scambi energetici in bovine in lattazione. I modelli del primo tipo consentono di tenere conto di processi elementari, ma presuppongono sia la conoscenza dettagliata di numerose variabili sia la disponibilità di elaboratori di capacità edeguata. I modelli del secondo tipo sono, invece, più semplici da trattare, ma si limitano a descrivere in *forma diversa* i dati sperimentali, ai quali non apportano alcuna nuova informazione: tra questi, un modello algebrico semplice, originariamente proposto da Wood, consente, sulla base di ipotesi non perfettamente definite, di prevedere la produzione di latte, le variazioni di peso vivo ed i fabbisogni energetici di bovine in lattazione.
Tale modello è stato provato su un campione di 50 vacche di razza Frisona italiana, con l'impiego di un semplice microelaboratore dotato del Basic elementare; i risultati mostrano una buona stima dei parametri, basata sull'esame di alcune caratteristiche della curva di lattazione facilmente individuabili.

## SUMMARY

**The choice of a simple algebraic model for calculating energetic exchanges in lactating cows.**

In order to describe the energetic exchanges in lactating cows, various mathematic models both «mechanicistic» and «empiric» types have been developed in recent years. The former type models make it possible to evaluate the elementary processes, but require both the detailed knowledge of numerous variables and the availability of suitable capacity computers. The latter type models are instead simpler to handle, but they merely reproduce the experimental data, without adding any new information: among these models, a simple algebraic one, originally devised by Wood, makes it possible, on the basis of ill definited hypothesis, to foresee the milk yield, the body weight variations and the energetic requirements of lactating cows. This model has been tested on a sample of 50 Holstein Friesian cows, using a minicomputer with elementary Basic; the results show an adequate estimate of the paramethers, based on the study of easily identified characteristics of the lactation curve.

[1] Assistente ordinario di Fisica presso la Facoltà di Scienze M.F.N. dell'Università di Sassari.

[2] Assistente ordinario di Istituzioni di Matematiche presso la Facoltà di Scienze M.F.N. dell'Università di Sassari.

[3] Collaboratore esterno dell'Istituto di Zootecnica della Facoltà di Agraria dell'Università di Sassari.

[4] Professore straordinario di Zootecnica generale presso la Facoltà di Agraria dell'Università di Sassari

Gli estratti del lavoro possono essere richiesti a:
For reprints apply to:
Prof. Giancarlo Rossi, Istituto di Zootecnica, Facoltà di Agraria - Via E. De Nicola - 07100 SASSARI, tel. 079/218001.

## PREMESSA

Il campo della modellizzazione matematica di fenomeni e processi che interessano l'agricoltura e le discipline scientifiche collegate ha conosciuto, nei tempi recenti, una rapida evoluzione, che consente di situarlo al livello degli *standard* piú avanzati, sia per quanto concerne gli sviluppi teorici che riguardo alle tecniche di calcolo e di elaborazione delle informazioni sperimentali (5). Sussistono tuttavia delle zone d'ombra che, pur originando sul terreno metodologico, non mancano di avere spiacevoli conseguenze al livello dell'applicazione pratica dei modelli, della loro comparazione e della conseguente valutazione.
Una prima fonte di equivoci la si deve vedere nella non sempre giustificata sopravalutazione dei modelli che vengono definiti «meccanicistici» o riduzionisti. Com'è noto, il dominio dei modelli matematici utilizzati in agricoltura, e piú in generale nelle scienze biologiche, può essere suddiviso, con un primo taglio un po' grossolano, in due sottoclassi: quella dei modelli, per l'appunto, meccanicistici da una parte, e dall'altra quella dei modelli che vengono detti «empirici».
Posto che, in ogni caso, un modello matematico deve sfociare nella proposta di un'equazione o di un *set* di equazioni che rappresentano quantitativamente il comportamento di un sistema, vengono fatti rientrare nella seconda categoria quei modelli che si limitano a sistemare o a ridescrivere in forma matematica i dati sperimentali, senza cioè aggiungere alcuna nuova informazione che non sia già implicitamente contenuta nei dati stessi. Si dice, pertanto, che la modellizzazione di tipo empirico possiede una portata limitata al livello della descrizione dei fenomeni, laddove i modelli del tipo meccanicistico sarebbero anche rivolti ad attingere una migliore comprensione dei fenomeni stessi. Per raggiungere questo fine è però necessario che i fenomeni ai quali si ha accesso diretto vengano in qualche modo collegati o ridotti a processi che si svolgono ad un livello di realtà piú profondo, di modo che una descrizione relativa al livello di complessità (n + 1) possa fungere da meccanismo esplicativo dei fenomeni che interessano il livello di complessità (n). Ora, finché ci si limita a questo stadio di semplificazione, la superiorità dei modelli meccanici deve essere accettata come un'ovvietà. La questione però presenta altri e piú complessi risvolti. C'è, in primo luogo, il fatto che un modello meccanico, considerato nel suo complesso, è tanto buono quanto lo è il peggiore dei sottosistemi che esso tematizza. È sufficiente, quindi, che uno solo dei suoi sottolivelli sia scarsamente compreso o non ben definito perché gli errori che si commettono nella valutazione delle grandezze e dei parametri ad esso relativi si diffondano sui risultati in uscita dall'intero modello. Piú ampio e sofisticato è il modello complessivo, piú critica diventa la situazione. Né va dimenticato il fatto che l'aggiunta di nuovi sottosistemi richiede che vengano tematizzati anche gli scambi, di materia, di energia e di infor-

mazione, tra i diversi compartimenti. Ciò si traduce in una altrettanto complessa rete di equazioni differenziali, per ciascuna delle quali è spesso necessario ricorrere a sofisticate tecniche numeriche di integrazione, tali da rendere inevitabile il ricorso ai grossi elaboratori e ai linguaggi di calcolo meno accessibili. Si comprende allora come non sia affatto raro imbattersi in casi in cui il consumo di energia intellettuale risulta del tutto sproporzionato rispetto ai risultati ottenuti.
D'altra parte, non è neppure così scontato che i modelli di tipo empirico non possano mai andare oltre il livello della mera descrizione dei fenomeni trattati. Perché, al contrario, capita frequentemente che i parametri che legano tra loro le variabili rilevanti, o almeno alcuni tra essi, siano suscettibili di plausibili interpretazioni, piú o meno dirette, ad esempio sul piano fisiologico o su quello biochimico.
Ma esiste almeno un'altra, egualmente fondamentale, sorgente di equivoci e di discutibili sovra e sotto-valutazioni dei modelli matematici. Si tratta del modo, spesso troppo disinvolto ed acritico, con cui i metodi dell'analisi statistica, in particolare della teoria della regressione, vengono applicati al problema cruciale di ricercare e di valutare quantitativamente il migliore adattamento delle equazioni del modello ai dati sperimentali. Il caso che piú frequentemente si presenta è quello in cui alcuni dei parametri che compaiono nelle equazioni del modello non sono inizialmente determinati, nè possono essere definiti sulla base di informazioni indipendenti, ma debbono essere valutati aggiustandone i valori così da produrre il migliore accordo possibile tra i risultati in uscita dal modello e i dati sperimentali disponibili. Questa tecnica di «calibrazione», o *tuning*, dei modelli sui dati sperimentali, che è di per sè criticabile sotto diversi aspetti, può essere in molti casi indispensabile e può anche produrre ottimi risultati (7). Ma non per questo deve essere assolutizzata, come se il *fitting* e la bontà del *fit* fossero l'unico scopo e l'unico metro di valutazione di un modello matematico. Non mancano i casi in cui potrebbe e dovrebbe essere preferibile una stima dei parametri rilevanti fondata su informazioni indipendenti dai dati sperimentali da adattare o su altre valutazioni di tipo semiempirico. Questa stima non sarebbe manipolabile con i metodi statistici, sia perché affetta da un errore sistematico sicuro ma non conoscibile, sia perché distorta in altro modo; dal punto di vista strettamente statistico, pertanto, essa non sarebbe valutabile né migliorabile. Cionostante il modello relativo potrebbe essere preferibile sotto altri aspetti, ad esempio per un suo piú immediato collegamento alla realtà, per la sua semplicità e per la relativa facilità della sua gestione. Né va dimenticato l'aspetto essenziale per cui un modello altamente informativo, semplice ed elegante, anche se inizialmente non produce risultati che si adattano con grande precisione ai dati sperimentali, rimane però piú aperto alle correzioni ed ai miglioramenti, sopratutto nel caso in cui i suoi parametri siano oggetto di stima indipendente dai dati sperimentali che debbono essere adattati.

Cercando di trarre dalle considerazioni appena svolte una conclusione di carattere generale, diremo che: la valutazione comparativa dei diversi modelli matematici che vengono suggeriti per i medesimi fenomeni o processi non può essere condotta sulla base di principi astratti ed universalmente validi, ma richiede che siano precisati, di volta in volta, scopi e finalità del modello, che vengano altresì specificate le informazioni di cui si dispone (indipendentemente dai dati sperimentali immediati) e le ipotesi di fondo su cui il modello è costruito; dovrebbero inoltre essere dichiarati gli strumenti ed i mezzi di calcolo a cui si può avere accesso.

## MATERIALI E METODI

### *A) Il modello generale*

In coerenza con quanto appena esposto nelle considerazioni introduttive, cercheremo, in primo luogo, di definire chiaramente i termini del problema. Il modello matematico che si ricerca deve rendere conto da un lato della produzione giornaliera di latte di una bovina, e dall'altro della domanda energetica, sotto forma di alimenti, necessaria a sostenere tale produzione, nonché delle eventuali contemporanee variazioni del peso vivo dell'animale. Si ipotizza un operatore che è sopratutto interessato a decidere della maggiore o minore fattibilità di determinati livelli di *output,* ma non dispone di informazioni dettagliate relative alle diverse variabili coinvolte nel processo di lattazione quali: l'energia destinata alla produzione, la digeribilità dei vari alimenti, la capacità del rumine, il peso dell'animale e le grandezze che concernono la complessa fisiologia della secrezione lattea. Vale a dire che il fruitore del modello è prioritariamente interessato a conoscere le conseguenze probabili di decisioni che egli dovrà prendere sulla base di informazioni né complete né ben definite. Egli inoltre non dispone dell'accesso immediato a sofisticati strumenti di calcolo e di elaborazione dei dati, dovendosi limitare all'ausilio di una calcolatrice programmabile o di un microelaboratore portatile dotato di un linguaggio Basic elementare.
Anche al fine di chiarire meglio il significato generale delle considerazioni introduttive, esaminiamo brevemente un tipico modello «meccanicistico» di media complessità, quale è quello proposto da Forbes (6), applicabile ai ruminanti in genere.
L'ipotesi che regge l'intero modello è che nei ruminanti sussista una sorta di relazione bifasica fra la qualità della razione e l'assunzione volontaria di alimenti; questa si manifesta come correlazione positiva fra il contenuto di energia disponibile e la quantità di alimenti effettivamente ingerita, nel caso di foraggi scadenti o di qualità media; la correlazione diventa, invece, negativa quando si somministrano

foraggi ottimi o razioni ricche di concentrati. Nel primo caso l'ingestione è limitata da un meccanismo competitivo di tipo fisico (stato di «replezione» del rumine). Nel secondo, quando la richiesta energetica si mantiene al di sotto del limite dato dalla capacità ruminale, la quantità di alimento assunta risulta legata alla richiesta energetica e cambia in rapporto al variare dei fabbisogni (produzione lattea, effetti ambientali climatici, ecc.) sotto il controllo di meccanismi metabolici. La gestazione comporta da tale punto di vista una complicazione ulteriore, in quanto coinvolge una crescita del consumo energetico e un aumento del volume uterino nonché la secrezione di ormoni che a loro volta possono influenzare i fabbisogni energetici.
Il modello di simulazione di Forbes si prefigge di quantificare i possibili livelli di ingestione di ruminanti in lattazione (bovini e ovini), come conseguenza dei due fondamentali meccanismi di controllo dell'assunzione volontaria di alimenti.
La figura 1 rappresenta schematicamente i trasferimenti energetici tematizzati dal modello, il quale deve essere pensato come un percorso ciclico che si ripete giornalmente.
Ad ogni iterazione giornaliera viene calcolata la quantità di alimenti necessaria a soddisfare le richieste energetiche dell'animale, che sono a loro volta confrontate con la limitazione imposta dal limite fisico dato dalla capacità ruminale. L'energia metabolizzabile degli alimenti effettivamente assunti è quindi ripartita nelle quote destinate rispettivamente al mantenimento, all'accrescimento e all'ingrasso, così da fornire i dati necessari per la successiva iterazione. Bisogna tenere presente che le frecce che collegano tra loro i vari compartimenti (Figura 1) rappresentano altrettanti flussi di materia o di energia o di informazione. A ciascun percorso corrisponde quindi almeno una equazione differenziale, che contiene a sua volta costanti e parametri, i cui valori devono essere ipotizzati in base alla conoscenza dei corrispondenti processi.
L'elaborazione elettronica consente però di simulare situazioni e sistemi assai piú complessi di quello descritto: ad esempio, è possibile sviluppare e trattare proficuamente anche modelli che consentano di ipotizzare la risposta al pascolamento di animali in lattazione tenendo presenti le interazioni ruminanti-pascolo (1).
La gestione del modello di Forbes richiede, tuttavia, la manutenzione di un programma pur sempre di discreta complessità ed il ricorso ad un linguaggio come il FORTRAN o il CSMP.
L'autore stesso avverte poi che la natura del modello e le ipotesi che è necessario formulare per il suo sviluppo vanificano in parte i tentativi di confrontare direttamente le sue previsioni con i dati sperimentali che effettivamente è dato osservare nei processi di gestazione e di lattazione.
L'importanza del modello rimane quindi sopratutto teorica, come peraltro ammette Forbes quando paragona i risultati con quelli ottenuti da Monteiro (8); quest'ultimo

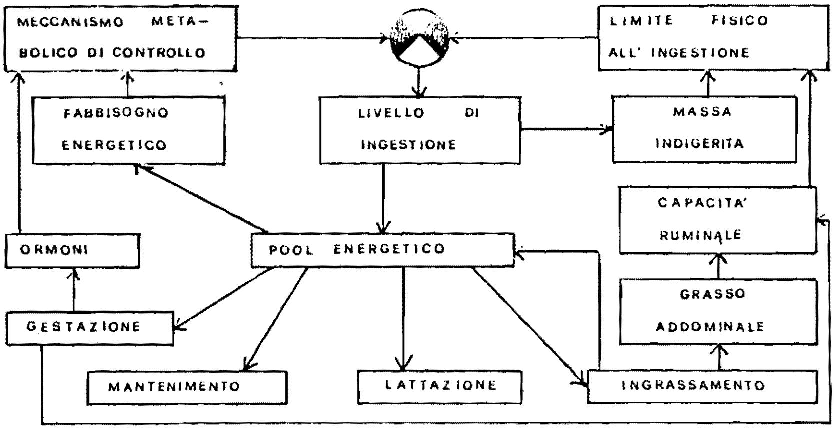


Fig. 1 - Il modello di Forbes (Forbes model).

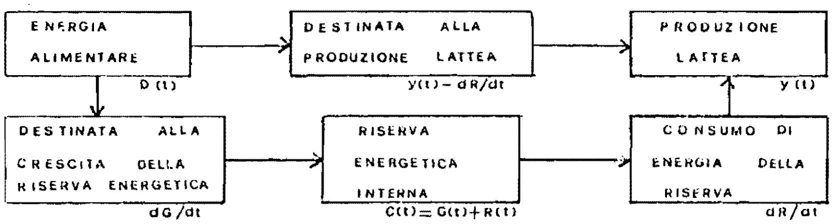


Fig. 2 - I percorsi energetici ipotizzati dal modello di Wood (Energetic exchanges in Wood model).

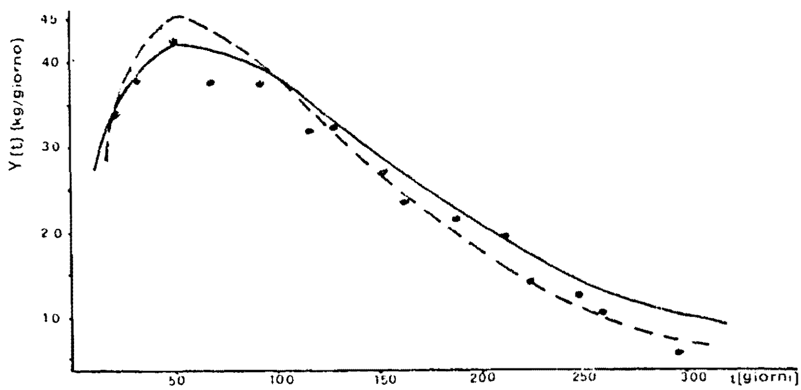


Fig. 3 - Un caso di curva $y(t) = at^b exp(-ct)$, ottenuta con stima empirica dei parametri (—) e con il metodo della regressione lineare (---).

Curve y(t), estimated empirically (—) and with linear regression (---).

autore propone un modello altrettanto complesso che è pero' suscettibile di adattamento ai dati sperimentali attraverso le tecniche standard di *fitting*, quale il metodo dei minimi quadrati.

Completamente diverso è il piano in cui si colloca il modello elaborato da Wood (12), che prende in considerazione i soli effetti osservabili, indipendentemente dalla stima dei complicati processi che avvengono nell'animale. Questi ultimi sono fatti ricadere sotto due ipotesi estremamente generali e del tutto plausibili: la prima può essere intesa come una generalizzazione del principio della conservazione dell'energia; la seconda si limita a ricordare che tutti i processi biologici sono in ultima analisi trattabili con l'ausilio di funzioni continue di crescita e di descrescita.

Il modello di Wood si ripromette di rendere conto del bilancio delle diverse fonti energetiche che vengono utilizzate, direttamente o indirettamente, nella produzione del latte. A tale fine vengono tematizzati tre fondamentali percorsi energetici: un percorso diretto dell'energia assunta con gli alimenti alla produzione lattea; un percorso che termina con l'accumulo di energia sotto forma di riserva energetica dell'animale; e infine un flusso che indirettamente riporta alla produzione lattea a spese dell'energia interna, attingendo alle riserve corporee accumulate durante la lattazione precedente e la gestazione. Una volta che i suddetti scambi e trasferimenti siano stati espressi nella medesima unità di misura energetica, ad esempio in kcal, la domanda energetica dell'animale al tempo t (giorni), interno ad un periodo di lattazione, potrà essere espressa come:

$$[1] \qquad D(t) = \lambda^{-1} [y(t) - \lambda_{rm} kRe^{-kt} + G(t)hge^{-g(t-N)}]$$

I significati della relazione complessiva e delle singole grandezze che in essa compaiono si chiariscono con facilità.

La relazione [1] ci dice infatti che la quantità di energia che si richiede in ingresso al tempo t, D(t), è direttamente proporzionale alla quantità di latte, anch'essa prodotta al tempo t, y(t), tradotta in termini energetici. La costante $\lambda$ è un coefficiente di conversione, che tiene conto delle perdite di energia che si verificano nella trasformazione da una forma ad un'altra. In effetti è necessario tenere conto di tre coefficienti: $\lambda_{dm}$ per la conversione dell'energia metabolizzabile assunta con gli alimenti in energia del prodotto finale (latte); $\lambda_{dr}$ per il percorso dagli alimenti alla riserva interna, cioè all'aumento di peso vivo dell'animale; $\lambda_{rm}$ dalla riserva interna alla produzione lattea. Si può ritenere (10) che:

$$[2] \qquad \lambda_{dm} = \lambda_{dr} = \lambda$$

ed accettare come valori tipici: $\lambda = 0{,}62$; $\lambda_{rm} = 0{,}82$.
Alla quantità $\lambda^{-1}$ y(t), proporzionale all'energia che si trova in uscita, deve essere però sottratto un termine che rappresenta la quantità di energia che l'animale attinge direttamente dalla propria riserva, ed aggiunto, invece, un termine equivalente al *surplus* di energia che la bovina richiede in ingresso per ricostruire ed eventualmente accrescere la riserva di energia interna, che verrà utilizzata nella lattazione successiva.
Al tempo t il livello dell'energia interna destinata ad essere consumata può essere rappresentato da una funzione esponenziale decrescente:

$$[3] \qquad R(t) = Re^{-kt}$$

dove R è un parametro che può essere rapportato alla quantità massima di energia che si prevede che l'animale utilizzi complessivamente, e k, che ha le dimensioni di $t^{-1}$, è il reciproco della costante di tempo della funzione esponenziale, che indica la rapidità con cui la curva tende al valore zero. Il tasso con cui la bovina attinge dalla riserva è dato dalla derivata della funzione [3]:

$$[4] \qquad dR/dt = -kRe^{-kt}$$

che, moltiplicato per il coefficiente $\lambda_{rm}$, fornisce il termine di sottrazione nella relazione [1], $\lambda_{rm}KRe^{-kt}$.
Il *surplus* di energia accumulato al tempo t è anch'esso esprimibile con una funzione esponenziale, ad esempio del tipo:

$$[5] \qquad G(t) = G\exp[h(1-e^{-g(t-N)})]$$

dove h e g sono due parametri che contengono le informazioni relative alla forma della curva di crescita dell'energia interna, e quindi del peso vivo dell'animale. Anche per la funzione di crescita ciò che importa ai fini del bilancio fra energia in ingresso, energia in uscita e variazione dell'energia interna, è la variazione nel tempo di G(t), cioè:

$$[6] \qquad dG/dt = G(t)hg\exp[-g(t-N)].$$

La figura 2 rappresenta schematicamente i percorsi energetici ipotizzati dal modello.
Una delle ragioni che motivano l'utilità del modello di Wood, ovviamente nei limiti che sono stati fissati al suo campo di applicazione, consiste nel fatto che i parametri che compaiono nelle sue equazioni possono essere posti direttamente in relazione ad alcuni tratti caratteristici della curva del bilancio energetico. I loro valori possono essere pertanto calcolati dall'operatore in modo empirico, sulla base del comportamento che egli ipotizza o intende simulare per la bovina in esame. Così, se con

N indichiamo il valore massimo del tempo in cui è consentito il consumo dell'energia della riserva, cioè il dimagrimento dell'animale, con l il tempo in cui riteniamo che la bovina debba aver recuperato il peso vivo iniziale, con f il valore del tempo in cui termina il processo di accumulazione dell'energia destinata alla riserva per la prossima lattazione, il tasso relativo di crescita $1/G(t)\dot{d}G(t)/dt$ raggiungerà al tempo l il valore massimo, onde si avrà:

[7] [8] $$g = 1/G(l)\dot{d}G(l)/dt; \quad h = e^{g(l-N)}$$

Detto inoltre G(f) il valore dell'energia complessivamente accumulata al tempo f, potremo porre:

[9] $$G = G(f)/\exp[h(1-e^{-g(f-N)})]$$

Altrettanto semplice e intuititiva è la determinazione dei parametri della funzione che rappresenta il termine di consumo delle riserve energetiche. Se indichiamo con E la quantità massima di energia che ipotizziamo attingibile dalla riserva, cioè il massimo calo di peso vivo consentito all'animale, potremo assumere per R un valore di poco superiore ad E, ad esempio:

[10] $$R = 1{,}O5E$$

Il parametro k, invece, determina la rapidità con cui avviene il trasferimento dell'energia dalla riserva alla produzione lattea ed è legato all'ampiezza dell'intervallo di tempo N, durante il quale è consentita la perdita di peso vivo:

[11] $$k = 3/N$$

*B) Il modello della curva di lattazione*

Nella relazione generale [1] il termine $y = y(t)$ rappresenta la quantità di latte, in kcal, prodotta giornalmente al tempo t dalla bovina. Pertanto la forma esplicita della funzione $y(t)$ definisce analiticamente la curva di lattazione dell'animale ipotizzato, svolgendo così il ruolo di una sorta di sottomodello, che entra come parte essenziale del modello principale per il quale è ritenuta valida l'equazione complessiva [1].
Com'è noto, sono possibili diverse forme di equazioni in grado di rappresentare matematicamente la produzione lattea delle bovine in funzione del tempo, la quale tipicamente segue un andamento in cui — a prescindere da alcuni effetti perturba-

tori — ad una crescita rapida dal momento del parto fino al valore di picco (raggiunto nel giro di qualche settimana) segue una diminuzione graduale fino al periodo di asciutta, che si colloca a circa 10 mesi dal parto e dura a sua volta circa 2 mesi.
Anche per il processo di lattazione le diverse rappresentazioni matematiche possibili sono classificabili fra i modelli «empirici» o tra quelli «meccanicistici».
Ovviamente nel caso in esame, in cui l'equazione relativa alla curva di lattazione compare come parte di un modello piú ampio che è complessivamente ispirato ad una metodologia «empirista», sarebbe del tutto fuori luogo proporre per la lattazione un modello del tipo «meccanicista». Tuttavia, è bene tenere presente che alcuni dei modelli «meccanicistici» elaborati di recente si propongono proprio di collegare matematicamente l'andamento temporale della produzione lattea alla richiesta alimentare dell'animale. Ad esempio, il modello dinamico di Neal e Thornley (9) tiene conto della bovina in lattazione con due meccanismi di controllo, uno dato dall'*input* alimentare e l'altro da quello ormonale, che viene tematizzato quale meccanismo responsabile del numero e dell'attività delle cellule secretorie della mammella.
Per quanto riguarda le curve di lattazione, tra i modelli empirici risulta di fondamentale importanza l'equazione originariamente proposta da Wood (10) (11) espressa nella forma:

[12] $$y(t) = at^{b}\exp(-ct)$$

dove $y(t)$ è la produzione giornaliera di latte al tempo $t$, esprimibile in $(kg \cdot giorni^{-1})$. Le grandezze $a$, $b$, $c$ sono i parametri caratteristici della curva: $a$ è espresso in $(kg \cdot giorni^{-(b+1)})$, $b$ è un parametro adimensionale, $c$ è misurato in $giorni^{-1}$. Questi parametri possono essere facilmente stimati con una delle procedure standard di *fitting* dell'equazione ai dati sperimentali, ad esempio con un metodo non lineare di stima secondo i minimi quadrati, o con una stima secondo la massima verosimiglianza (MLE).
È anche possibile però considerare la produzione complessiva in un intervallo di tempo $\Delta t$, compreso tra $t_{i-1}$ e $t_i$, che ponendo $\bar{t}_i = 1/2(t_{i-1} + t_i)$ è data con approssimazione accettabile da:

[13] $$Y_i = y(\bar{t}_i)\Delta t$$

Sostituendo la [12] nella [13], si ottiene:

[14] $$Y_i = a\bar{t}_i^{-b}\exp(-c\bar{t}_i)\Delta t$$

Questa trasformazione consente, prendendo i logaritmi di entrambi i membri della [14], di passare alla:

$$[15] \qquad \log Y_i = \log(a\Delta t) + b\log\bar{t}_i - c\bar{t}_i$$

e quindi di stimare i parametri con un semplice procedimento di regressione lineare del $\log Y_i$ su $\log\bar{t}_i$ e su $\bar{t}_i$.
Il modello di Wood è stato criticato sotto diversi aspetti: ne sono state proposte correzioni e suggeriti miglioramenti. In particolare Cobby e Le Du (2) hanno notato che, sebbene la regressione lineare definita dalla [15] sia effettivamente in grado di rendere conto dei dati sperimentali con un'approssimazione media dell'ordine del 92%, tuttavia non poche curve di lattazione reali si discostano dal modello in modo assai piú rilevante di quanto lasci supporre la misura dell'adattamento medio. Ad esempio, quando i parametri siano stimati con il metodo della regressione lineare, l'equazione [12] tende a sovrastimare i dati relativi al primo periodo della lattazione, ed a sottostimare quelli relativi al periodo finale.
È possibile appiattire parzialmente il *trend* dei residui, che tendono evidentemente a passare da positivi a negativi quando si percorre un intero periodo di lattazione, utilizzando un metodo di stima dei parametri che conservi all'equazione [12] la forma originale nella quale i parametri compaiono in forma non lineare. La stima non lineare, ottenuta con tecniche numeriche di minimizzazione della somma delle differenze quadratiche fra i valori osservati e quelli calcolati, riduce notevolmente la deviazione sistematica dalla distribuzione casuale dei residui.
Un risultato simile si ottiene anche con un metodo di regressione lineare multipla ponderata con pesi proporzionali ai quadrati dei valori corrispondenti della produzione lattea.
Rimane tuttavia un difetto residuo della capacità di adattamento del modello ai dati sperimentali, che è indipendente dalla tecnica di *fitting* utilizzata e che deve essere conseguentemente attribuito alla forma stessa dell'equazione [12]. In effetti, come compaiono in tale equazione, i parametri a, b, c risultano essere altamente correlati, di modo che ogni definizione del valore di uno di essi si riflette immediatamente sui valori degli altri (3); ciò si traduce nella scarsa convergenza di qualsiasi procedimento iterativo di stima dei parametri. Per ridurre la suddetta correlazione è necessario sostituire l'equazione originaria con una equazione della forma:

$$[16] \qquad y(t) = At^{mc}\exp(-ct)$$

o, meglio ancora, della forma:

$$[17] \qquad y(t) = A't^{mc}\exp\,[-c(t-k)]$$

che elimina un'altra sorgente di errore che si manifesta per valori elevati di t (3) (4). Non pochi rimangono tuttavia i pregi del modello di Wood che, come si è detto, presenta una buona adattabilità media ai dati sperimentali. Il modello è inoltre sufficientemente flessibile e consente miglioramenti che tengono conto di diversi effetti perturbatori, i quali possono allontanare, anche sensibilmente, le reali curve di lattazione dall'andamento tipico. È noto, ad esempio, che la forma della curva è notevolmente influenzata, oltreché dall'ordine di lattazione, dall'età, dal peso vivo dell'animale, nonché da diversi fattori ambientali, tra i quali la stagione di parto. L'equazione originaria può essere facilmente migliorata così da rendere conto almeno di quegli aspetti che si presentano con maggiore frequenza e tipicità, quali il cosidetto «picco di primavera», o l'effetto sul rendimento complessivo associato al periodo dell'anno in cui incomincia la lattazione (11).
Ma, dal nostro punto di vista, il pregio essenziale che deve essere riconosciuto al modello di Wood consiste nel fatto che esso consente una stima dei parametri rilevanti basata su un metodo «empirico» che produce risultati apprezzabili per un ampio spettro di problemi.
Differenziando l'equazione [12] rispetto al tempo si ha:

[18] $$dy/dt = (b - ct)y/t$$

Poiché il valore del picco, $y = y_m$, si presenta per il valore $t_m$ del tempo in cui $dy/dt = 0$, si ottiene:

[19] $$t_m = b/c; \quad y_m = a(b/c)^b \exp(-b)$$

Definendo poi il tasso specifico del declino di y(t) come $(1/y)\, dy/dt = r$, e applicando la [18], si avrà:

[20] $$r = b/t - c$$

Al tempo $t_h$ definito come $t_h = (t_m + t_f)/2$ dove $t_f$ si riferisce al termine della lattazione:

[21] $$r(t_h) = 2b/(t_m + t_f) - c = c\,(t_m - t_f)/(t_m + t_f)$$

Ora, $r(t_h)$ può essere valutato con approssimazione sufficiente sulla base del tasso specifico medio di declino, $\bar{r}$ — relativo all'intero intervallo che segue il picco di lattazione — che può essere stimato in modo empirico.

Riassumendo, le relazioni seguenti consentono una valutazione approssimata dei parametri dell'equazione di Wood:

$$\begin{aligned} & c = \bar{r}\,(t_m + t_f)/(t_m - t_f) \\ [22] \qquad & b = ct_m \\ & a = y_m\,(c/b)^b \exp(b) \end{aligned}$$

Infine, la produzione complessiva relativa ad un'intera lattazione, o in generale fino ad un dato tempo $t_f$, è calcolabile come:

$$[23] \qquad Y = \int_o^{tf} at^b\, e^{-ct}\, dt = a/c^{(b+1)}\, \gamma\,(b+1,\, ct_f)$$

I valori della funzione $\gamma$ incompleta possono essere calcolati con uno dei diversi algoritmi disponibili, o piú semplicemente ricavati dalle apposite tavole (Pearson K.; *Tables of the incomplete gamma function*, London HMSO, 1922).

## RISULTATI E DISCUSSIONE

L'equazione di Wood [12] è stata messa a confronto con i dati rilevati su 50 bovine di razza Frisona, appartenenti all'azienda zootecnica di Donna Ricca, sita nella Nurra di Sassari, scelte in modo da avere una distribuzione il piú possibile uniforme dei diversi effetti perturbatori (11).
I parametri a, b, c sono stati stimati sia con il metodo standard della regressione lineare di logy su logt e su t, sia con il metodo empirico suddetto, cioè con una valutazione diretta: 1) del tasso specifico medio di diminuzione della quantità di latte prodotta giornalmente, nell'intervallo di tempo fra il picco di lattazione e la fine della lattazione medesima; 2) del valore della produzione giornaliera massima $y_m$; 3) dei valori di $t_m$ e di $t_f$, rispettivamente tempo del picco e tempo di fine lattazione; e con la successiva applicazione delle relazioni [22].
La regressione lineare consente in media di rendere conto dei dati sperimentali con una precisione del 92%. Tuttavia i valori calcolati di y(t) sono affetti da una deviazione sistematica, che si manifesta nella tendenza a sovrastimare i dati per quasi tutta la prima metà della lattazione, ed a sottostimarli nella seconda metà.
La stima empirica dei parametri comporta ovviamente una deviazione sistematica ulteriore, dovuta alla valutazione «a vista» della pendenza media della curva nell'intervallo di tempo successivo al picco, che si traduce in una tendenza costante a sovrastimare o a sottostimare i risultati sperimentali. In figura 3 è riprodotto un esem-

pio tipico di curva ottenuta con la stima empirica dei parametri (a tratto continuo) e confrontata con i dati osservati e con i risultati della stima ottenuta con la regressione lineare (curva a tratteggio).

La deviazione sistematica può essere ridotta, almeno in parte, con la ripetizione delle operazioni empiriche di stima delle grandezze rilevanti. Siffatta correzione, tuttavia, non ha molto significato quando ciò che primariamente conta è vagliare la possibilità, intrinseca al modello, di una sua utilizzazione immediata sulla base di un corredo informativo limitato alla conoscenza o alla previsione di $y_m$, $t_m$, $t_f$ ed $\bar{r}$.

Tale possibilità è confermata dal fatto che, anche nei casi di stima non ottimale, l'adattamento medio della curva ai dati sperimentali non scende mai al di sotto dell'88%; mentre assai piú precisa risulta la previsione relativa alla produzione lattea complessiva. Nella tabella 1 sono riportati i valori relativi ad un campione di 10 bovine, dei parametri determinati empiricamente; insieme con i valori, rispettivamente calcolati e misurati, della produzione lattea complessiva per diversi tempi $t_f$ ipotizzati quali tempi finali di lattazione.

La flessibilità del modello generale, che conduce all'equazione [1] relativa al bilancio energetico, è stata invece testata simulando alcuni comportamenti tipici dell'intero campione, cioè scegliendo alcuni gruppi significativi di valori di $y_m$, $t_m$, $t_f$ ed $\bar{r}$, imponendo quindi differenti condizioni di perdita, successivo recupero e guadagno finale di peso vivo dell'animale, e calcolando gli *input* energetici corrispondenti. La figura 4 riproduce i risultati relativi ad una stessa curva di lattazione, ottenuta però in due differenti situazioni del bilancio energetico.

La lattazione ipotizzata presenta una produzione massima $y_m$ = 35 kg/giorno; il picco si verifica al $t_m$ = 56 giorni; la durata della lattazione è di 310 giorni; il tasso medio di declino $\bar{r}$ è posto = 0,0043 giorni$^{-1}$.

Nella prima ipotesi la bovina perde 40 kg di peso vivo nei primi 126 giorni di lattazione, recupera il peso perduto intorno al 250° giorno, per arrivare al 365° giorno con un guadagno complessivo di 100 kg.

Nella seconda ipotesi, invece, si ammette che il peso vivo dell'animale diminuisca di 80 kg in 60 giorni, che il peso perduto sia recuperato intorno al 200° giorno, per arrivare ad un guadagno complessivo in peso di 110 kg in 350 giorni.

Poste le ipotesi di lavoro, la gestione del modello richiede la conoscenza degli equivalenti energetici relativi sia al latte prodotto che ad ogni kg di variazione di peso vivo dell'animale. Nella nostra ipotesi di simulazione sono stati assunti i seguenti valori: kcal 750 per kg di latte prodotto e kcal 4700 per kg di variazione di peso vivo dell'animale. A questo punto, le relazioni [22] conducono immediatamente ai valori dei parametri caratteristici dell'equazione relativa alla lattazione.

La stima degli altri parametri che determinano la forma dell'equazione [1] richiede invece la valutazione empirica della pendenza massima della curva di recupero e di

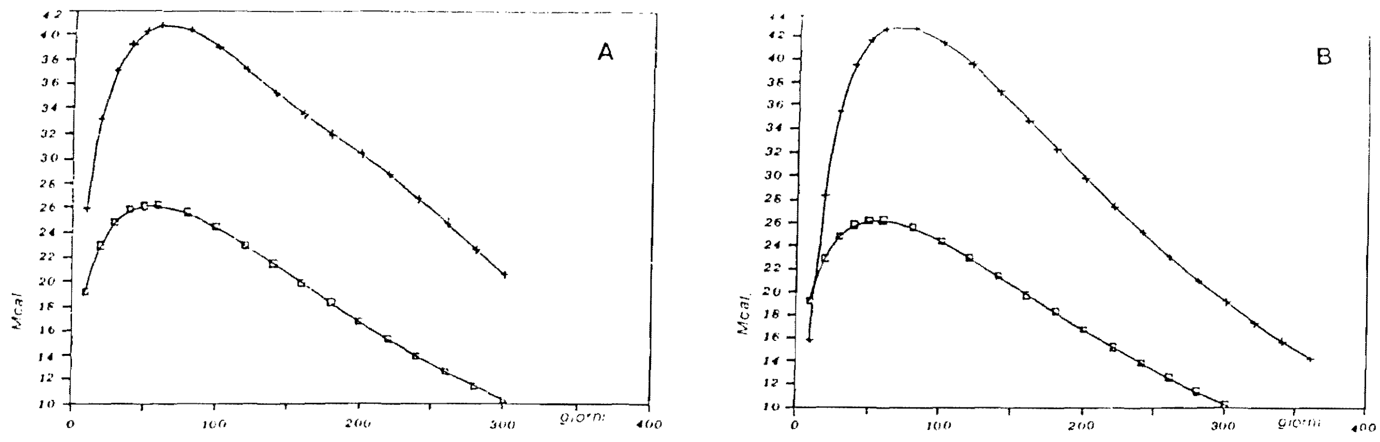


Fig. 4 - Curve di lattazione □ e di fabbisogno energetico x, relative alla 1ª (A) e alla 2ª (B) ipotesi.
Lactation and energetic requirement curves in 1st (A) and 2nd (B) hypothesis.

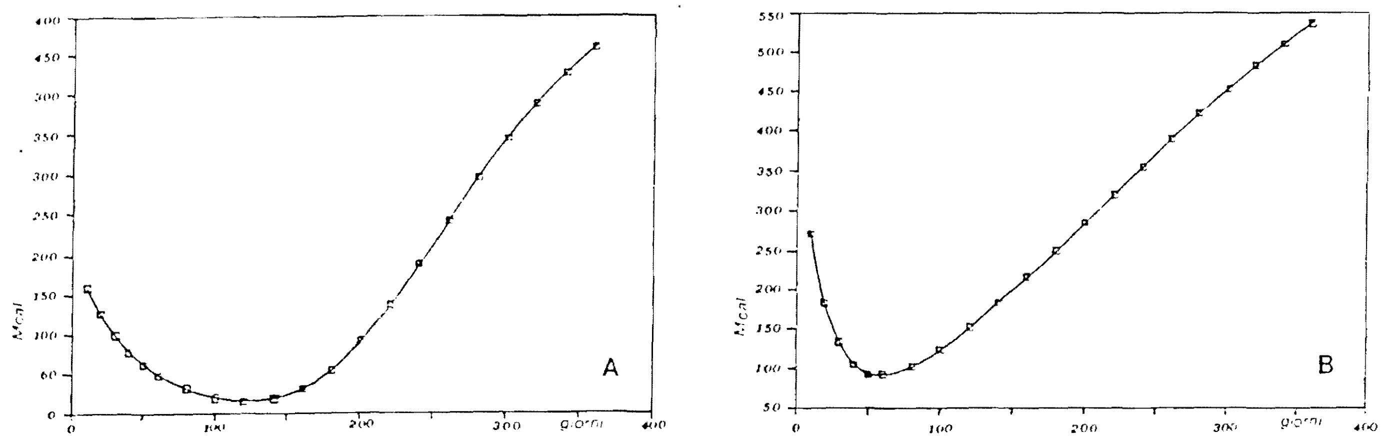


Fig. 5 - Variazione delle condizioni energetiche della bovina nella 1ª (A) e nella 2ª (B) ipotesi.
Energetic state variation of cow in 1st (A) and 2nd (B) hypothesis.

*Tab. 1* - **Valori dei parametri della curva di lattazione stimati empiricamente, produzione complessiva al tempo $t_f$, calcolata e misurata su un campione di 10 bovine.**

**Values of lactation curve paramethers empirically estimated, total production in $t_f$ moment, calculated and estimated on a sample of 10 cows.**

| N. | c | b | a | $t_f$ | Y (kg latte) calcolato | Y (kg latte) misurato | errore % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,00570 | 0,3020 | 14,31 | 300 | 7.850 | 8.090 | 3 |
| 2 | 0,00097 | 0,0426 | 39,07 | 290 | 10.260 | 10.660 | 4 |
| 3 | 0,00760 | 0,5961 | 4,81 | 265 | 7.483 | 7.135 | 5 |
| 4 | 0,00440 | 0,4298 | 7,18 | 250 | 7.300 | 7.470 | 3 |
| 5 | 0,00370 | 0,1500 | 22,31 | 225 | 6.300 | 5.960 | 6 |
| 6 | 0,00587 | 0,2760 | 19,58 | 295 | 9.350 | 8.750 | 4 |
| 7 | 0,00297 | 0,1929 | 18,42 | 250 | 7.600 | 7.470 | 3 |
| 8 | 0,00520 | 0,2860 | 10,49 | 270 | 5.360 | 5.550 | 4 |
| 9 | 0,00740 | 0,6254 | 5,43 | 270 | 9.200 | 10.200 | 10 |
| 10 | 0,00560 | 0,2800 | 16,35 | 327 | 8.470 | 8.590 | 3 |

crescita della riserva energetica, cioè del valore massimo della derivata dG(t)/dt che si presenta per $t = I$, tempo in cui la bovina ha recuperato il peso perduto nella fase iniziale della lattazione.

Si tratta, evidentemente, di un'operazione elementare, dato che per $t = I$ la curva relativa possiede un punto di inflessione. Operata poi la trasformazione delle grandezze energetiche in kcal, i parametri vengono determinati con l'ausilio delle relazioni [7] ÷ [13]. I valori dei parametri necessari alla gestione del modello [1], nelle due ipotesi cui si riferisce la figura 4, sono riportati nella tabella 2, insieme con il quadro sinottico delle relazioni utilizzate per il loro calcolo.

La combinazione dell'equazione [5] — che fornisce la quantità di energia accumulata dalla bovina nella lattazione in corso fino al momento considerato — e dell'equazione [3] — che rappresenta il livello al quale, nello stesso tempo, si è portata la riserva di energia accumulata nel periodo precedente l'attuale lattazione — riproduce giorno per giorno la situazione complessiva del bilancio energetico dell'animale, cioè la quantità netta della riserva di energia interna. In effetti i cicli di lattazione si sovrappongono l'un l'altro, per cui la relazione:

$$[24] \qquad C(t) = R\exp(-kt) + G\exp[h(1-e^{-g(t-N)})]$$

si riferisce, da un lato, alla mobilizzazione, durante la lattazione, di una quantità di energia che è stata accumulata prima del parto, e dall'altra ad una nuova accumulazione di energia, che verrà utilizzata nella lattazione successiva. Le curve della fi-

*Tab. 2* - **Parametri dell'equazione [1] stimati empiricamente nelle due ipotesi di bilancio energetico.**
**Paramethers of equation [1], empirically estimated, in two energetic balance hypotheses.**

| Parametro | Relazione *determinante* | Unità *misura* | Prima *ipotesi* | Seconda *ipotesi* |
|---|---|---|---|---|
| c | $r \frac{t_m + t_f}{t_m - t_f}$ | $\frac{1}{\text{giorni}}$ | 0,0062 | 0,0062 |
| b | $ct_m$ | adim. | 0,3469 | 0,3469 |
| a | $y_m(c/b)^b e^b$ | $\frac{\text{kg}}{(\text{giorni})^{b+1}}$ | 12,5 | 12,5 |
| k | 3/N | $\text{giorni}^{-1}$ | 0,0238 | 0,05 |
| R | 1,05E | Mcal | 200 | 400 |
| g | $1/G(l) \frac{dG(l)}{dt}$ | $\text{giorni}^{-1}$ | 0,0125 | 0,0065 |
| h | $e^{g(l-N)}$ | adim. | 4,83 | 2,398 |
| G | $\frac{G(f)}{\exp h(1-e^{-g(f-N)})}$ | kcal | 4.760 | 70.475 |

gura 5 consentono di seguire le variazioni delle condizioni energetiche della bovina, rispettivamente nella prima e nella seconda delle ipotesi descritte precedentemente. Fintanto che $t < N$, $G(t)$ è trascurabile, $C(t)$ è completamente determinato da $R(t)$. La transizione dalla situazione di bilancio energetico negativo a quella di bilancio positivo, cioè di ripresa della crescita della riserva corporea, è regolata dal valore di N; se tale valore è spostato indefinitamente, allora $G(t) = 0$ e l'animale permane nella situazione di bilancio negativo finché $dR/dt$ diviene a sua volta trascurabile.

## CONCLUSIONI

Il modello algebrico di Wood si limita ad applicare, alle bovine in lattazione, il primo principio della termodinamica, al fine di ricavare un'equazione generale di bilancio

energetico che consenta di rendere conto della produzione lattea giornaliera, del fabbisogno energetico alimentare e delle variazioni del peso vivo dell'animale.
Non si tratta evidentemente di un modello così sofisticato da poter risultare soddisfacente per ogni genere di applicazioni; ma, una volta che siano precisati gli scopi e sia delimitato il campo di validità, esso si dimostra sufficientemente flessibile, capace di produrre risultati che si adattano bene ai dati osservati e dotato di un apprezzabile potere previsionale.
Un pregio ulteriore consiste nel fatto che esso consente una stima «empirica» dei parametri rilevanti, basata su una semplice valutazione di alcuni tratti caratteristici delle curve di lattazione e di incremento della riserva energetica dell'animale. Né si deve trascurare il vantaggio legato al fatto che la gestione dell'intero modello non richiede altro strumento che una calcolatrice programmabile.
Ovviamente, la corretta successione delle singole operazioni, la rapidità di inserimento di nuovi dati e di elaborazione di nuove informazioni e il controllo dei risultati in uscita risultano piú agevoli, se le equazioni del modello vengono inserite in un programma per elaboratore elettronico. Un esempio di programma di questo tipo, scritto in BASIC e capace di produrre in *output* la curva di lattazione, l'andamento temporale della domanda di energia e della situazione energetica complessiva dell'animale, è riportato nella successiva appendice.

BIBLIOGRAFIA

1) BAILE C.A., FORBES J.M., (1974) - Physiol. Rev. 1974, *54*(1): 160-214.
2) COBBY J.M., LE DU J.L.P., (1977) - Anim. Prod. 1978, *26*(2): 127-133.
3) DHANOA M.S., (1980) - Anim. Prod. 1981, *32*(3): 349-351.
4) DHANOA M.S., LE DU J.L.P., (1981) - Anim. Prod. 1982, *34*(3): 243-247.
5) FRANCE J., THORNLEY J.H.M., (1984) - Mathematical models in agriculture. Butterworths Publishers, London.
6) FORBES J.M., (1976) - Anim. Prod. 1977, *24*(2): 203-214,
7) GUEST P.G., (1961) - Numerical methods of curve fitting. Cambridge University Press.
8) MONTEIRO L.S., (1971) - Anim. Prod. 1972, *14*(3): 273-281.
9) NEAL H.D. St. C., THORNLEY J.H.M., (1983) - J. Agric. Sci. Camb. 1983, *101*(2): 389-400.
10) WOOD P.D.P., (1967) - Nature 1967, *216*(5111): 164-165.
11) WOOD P.D.P., (1968) - Anim. Prod. 1968, *11*(3): 307-316.
12) WOOD P.D.P., (1977) - Anim. Prod. 1979, *28*(1): 55-63.

APPENDICE

Listato di programma in BASIC, per la produzione in output della curva di lattazione y(t), dell'andamento temporale del fabbisogno energetico D(t) e delle condizioni energetiche interne C(t) di una bovina in lattazione.

```
100: INPUT «Q»; Q, «M»; M, «TM»; TM, «TF»; TF
150: C = Q* (TM+TF) / (TF-TM)
200: B = TM* C
250: A = M* (1/TM)^B*EXP B
300: USING «# # # # # #. # # # #»
350: PRINT C: PRINT B: PRINT A
400: INPUT «N»; N, «I»; I, «F»; F, «Z»; Z, «GF»; GF, «E»; E
450: K = 3/N : R = 5000*E : H = EXP (Z*(I-N))
500: G1 = 4700*GF/(EXP (H*(1-EXP (-Z*(F-N)))))
550: FOR T = 10 TO 360 STEP 10
600: YK = A*T^B*EXP (-C*T)
650: Y = 750*YK
700: GT = G1*EXP (H*(1-EXP (-Z8(T-N))))
750: D = 1/0.62* (Y-0.82*K*R*EXP (-K*T) + GT*H*Z*EXP (-Z*(T-N)))
800: C1 = R*EXP (-K*T) + G1*EXP (H*(1-EXP (-Z*(T-N))))
850: PTINT «Y =»; Y : PRINT «D»; D : PRINT «C1 =»; C1
900: NEXT T
```