



ANNALI

DELLA FACOLTA' DI AGRARIA DELL' UNIVERSITA'
SASSARI

studi sassaresi

Sezione III

1980 - 81 Volume XXVIII

ANNALI

DELLA FACOLTA' DI AGRARIA DELL' UNIVERSITA'

———— SASSARI ————

DIRETTORE: G. RIVOIRA

*COMITATO DI REDAZIONE: M. DATTILO - F. FATICHENTI - C. GESSA - L. IDDA
F. MARRAS - A. MILELLA - P. PICCAROLO - A. PIETRACAPRINA - R. PROTA
R. SATTA - G. TORRE - A. VODRET*

studi sassaresi

ORGANO UFFICIALE
DELLA SOCIETÀ SASSARESE DI SCIENZE MEDICHE E NATURALI



Istituto di Costruzioni Rurali dell'Università di Sassari

(Direttore: Prof. Ing. *Stefano De Montis*)

MARIO PISANU*

ASPETTI TEORICI E PRATICI NELLA DETERMINAZIONE DELL'ARMATURA IN MENSOLE VERTICALI DI CALCESTRUZZO ARMATO

1. PREMESSA

L'attività di routine dei progettisti di strutture e manufatti in calcestruzzo armato riserva generalmente limitate attenzioni alla riduzione dell'armatura metallica negli elementi verticali soggetti a spinte laterali: perciò il dimensionamento dei ferri d'armatura, quand'anche venga eseguito con metodi rigorosi, raramente è « modulato » secondo l'entità effettiva delle spinte che variano in funzione crescente con l'altezza della parete.

Gli inconsueti tentativi di adeguamento, quando si fanno, si avvalgono di metodi del tutto empirici, che determinano nelle strutture progettate percentuali d'armatura di gran lunga superiori alle reali esigenze e pertanto costi di realizzazione maggiori al necessario.

Tale modo di operare contrasta con la necessità, presente soprattutto nel settore delle costruzioni agricole, di ridurre per quanto possibile i costi, premessa determinante per il conseguimento di investimenti e produttività ottimali, e obiettivo primario in ogni attività d'impresa.

A tal fine è anche utile ricordare che in un'azienda moderna trovano largo impiego le strutture suddette (le pareti di sili orizzontali e verticali, i muri di sostegno sono soltanto alcuni esempi) per riaffermare ulteriormente l'importanza economica di un loro corretto dimensionamento.

I modi operativi d'intervento più semplici sono essenzialmente due:

- a) ridurre il numero dei ferri procedendo dalle sezioni inferiori verso le superiori, tenedone costante il diametro,

* Assistente ordinario - Istituto di Costruzioni rurali.

L'elaborazione dei dati col calcolatore è stata eseguita da Gianna Panu, tecnico dell'Istituto.

b) conservare l'equidistanza dei ferri d'armatura, adeguando i diametri all'entità delle spinte.

Quale soluzione adottare? Lo studio si propone di dare una risposta al quesito, ponendo a confronto i due aspetti anzidetti.

2. SCOPO DELLO STUDIO

In particolare prende in esame ed analizza i presupposti teorici che regolano la riduzione dell'armatura nelle strutture in oggetto, per elaborare una metodologia che consenta nella pratica, la progettazione di manufatti più economici possibile. Allo scopo si fa riferimento ad una struttura verticale con armatura semplice, senza nervature e soggetta a spinta orizzontale ripartita con legge triangolare e quindi senza sovraccarico (Fig. 1).

Per rendere più lineare e meno dispersiva la successiva esposizione viene qui di seguito riportata la simbologia adottata con le relative caratteristiche dimensionali:

h_0 (cm)	altezza totale del manufatto
h_x (cm)	distanza dalla sommità di una generica sezione orizzontale x - x
b (cm)	larghezza del manufatto considerata ai fini dei calcoli ($b = 100$ cm)
S_0 (kg)	spinta orizzontale totale
y_0 (cm)	braccio della spinta S_0
S_x (kg)	spinta orizzontale relativa alla sezione x - x
y_x (cm)	braccio della spinta S_x
M_0 (kgcm)	momento flettente alla base del manufatto
M_x (kgcm)	momento flettente relativo alla sezione x - x
t	coefficiente per il calcolo di progetto dell'armatura di una sezione inflessa con armatura semplice
Af_0 (cm ²)	sezione dell'armatura alla base del manufatto
Af_x (cm ²)	sezione dell'armatura nella sezione x - x
N	numero dei ferri per metro lineare
\varnothing_0 (mm)	diametro dei ferri alla base
\varnothing_x (mm)	diametro dei ferri nella sezione x - x
Vf_t (cm ³)	volume del ferro teorico
Vf_{sr} (cm ³)	volume del ferro senza riduzione di armatura
Vf_r (cm ³)	volume del ferro con riduzione dell'armatura
Pf (kg)	peso dell'armatura

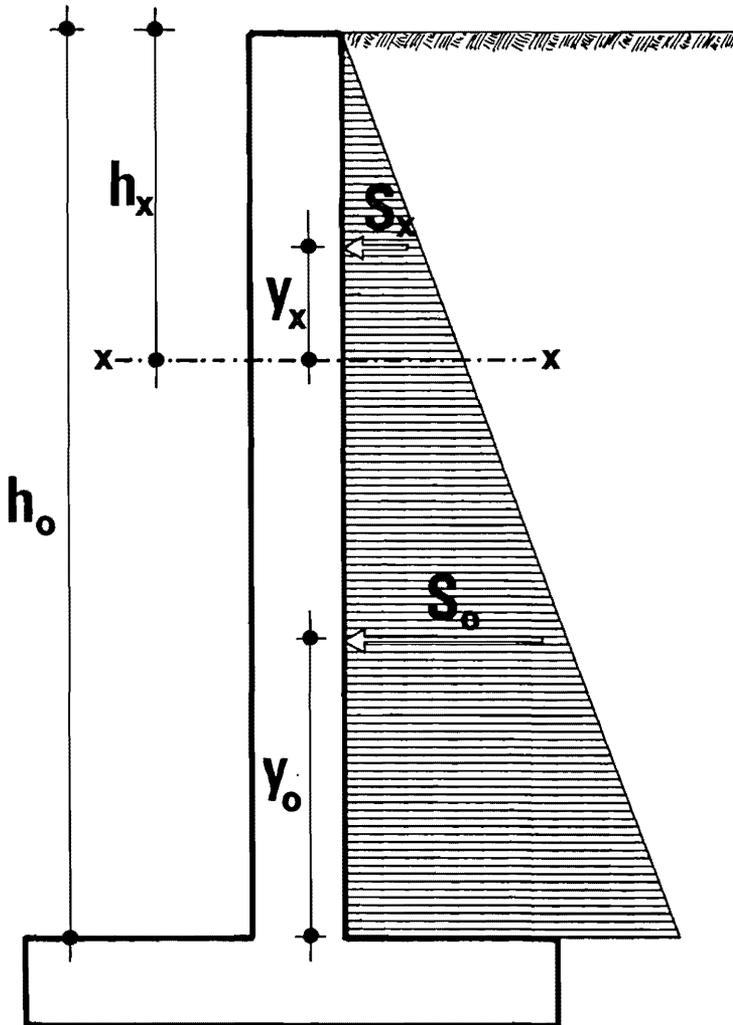


Fig. 1 - Diagramma delle spinte
Thrust diagram

Per ragioni pratiche, inoltre, le altezze sono state compute a partire dalla sommità del manufatto; la numerazione dei pedici, relativa ai vari simboli, è invece progressiva dalla base verso l'alto.

3. ASPETTI TEORICI

3.1. Armatura alla base

$$A_{f_0} = t \sqrt{M_0 \cdot b} = t \sqrt{S_0 \cdot y_0 \cdot 100}$$

$$A_{f_0} = 10 t \sqrt{\frac{1}{3} S_0 \cdot h_0} \quad (1)$$

3.2. Armatura in generica sezione ¹

$$A_{f_x} = t \sqrt{M_x \cdot b} = t \sqrt{S_x \cdot y_x \cdot b}$$

Poiché $S_x = S_0 \frac{h_x^2}{h_0^2}$ e $y_x = \frac{1}{3} h_x$

$$A_{f_x} = \frac{10t}{h_0} \sqrt{\frac{1}{3} S_0 \cdot h_x^3} \quad (2)$$

3.3 Relazione tra armatura e altezza

Dalla (2) si ha che:

$$h_x = \sqrt[3]{\frac{3A_{f_x}^2 \cdot h_0^2}{100 t^2 \cdot S_0}} \quad (3)$$

3.4. Ricerca analitica delle altezze di riduzione

Osservando la Fig. 2 si può ricavare il volume di ferro come somma di aree di rettangoli compute a partire dall'estremità inferiore del muro.

¹ La relazione (2) non tiene conto dello spessore del muro nelle varie sezioni che teoricamente dovrebbe ridursi, al pari dell'armatura, per assumere valore 0 in sommità, mentre nella pratica esso viene rastremato linearmente fino ad un minimo di 25-30 cm.

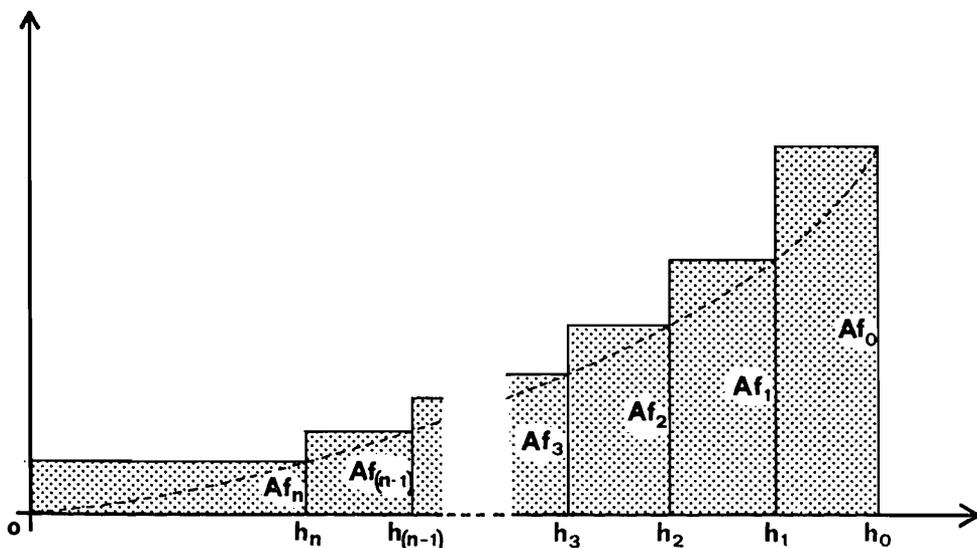


Fig. 2 - Sezioni teoriche dell'armatura in funzione delle altezze di riduzione.
Theoretical reinforcement sections in function of reduction heights

Supposto infatti di dover effettuare n riduzioni di armatura e indicando con m il numero ordinale delle riduzioni si avrà:

$$V_f = \sum_{m=0}^n A_{f_m} (h_m - h_{m+1}) \quad (4)$$

Dove il primo e l'ultimo termine sono rispettivamente:

$$A_{f_0} (h_0 - h_1) \text{ e } A_{f_n} (h_n - 0)$$

Poiché A_{f_0} e h_0 sono noti e poiché le varie A_{f_m} possono essere espresse in funzione dei corrispondenti h_m come visto nella (2), si può esprimere la (4) in funzione dei soli h_m .

Applicando a quest'ultima la teoria dei massimi e dei minimi (derivando cioè rispetto ai vari h_m ed eguagliando a 0 tali derivate parziali) si perviene ad un sistema di n equazioni con n incognite; la sua soluzione permette di conoscere i valori di h_m^2 che rendono minima l'armatura espressi in funzione dell'altezza totale h_0 del manufatto, e cioè:

$$h_m = \alpha_m \cdot h_0 \quad (5)$$

dove α_m è un coefficiente che si determina appunto con la risoluzione del sistema suddetto.

² I valori di h_m così determinati, sono computati come già detto a partire dalla sommità del manufatto; per determinarli a partire dalla base è necessario effettuare la differenza $h_0 - h_m$.

Sostituendo ora il valore di h_m nella relazione (2) si può determinare il corrispondente valore di Af_m .

$$Af_m = \frac{10t}{h_o} \sqrt{\frac{1}{3} S_o (\alpha_m \cdot h_o)^3} = \sqrt{\alpha_m^3 \cdot 10t} \sqrt{\frac{1}{3} S_o \cdot h_o} = \sqrt{\alpha_m^3 \cdot Af_o}$$

Ponendo $\sqrt{\alpha_m^3} = \beta_m$ si ha che:

$$Af_m = \beta_m \cdot Af_o \quad (6)$$

Nella Tab. 1 vengono riportati i valori di α e β in funzione di n e m .

3.5. Quantità di ferro

La quantità di ferro nel caso non si operi alcuna riduzione di armatura (Fig. 3.a), risulta:

$$Vf_{sr} = Af_o \cdot h_o$$

cioè:

$$Vf_{sr} = 10 t \cdot h_o \sqrt{\frac{1}{3} S_o \cdot h_o} \quad (7)$$

Mentre il volume di ferro teorico, cioè quello indicato in Fig. 3.b, può essere calcolato con il seguente integrale definito:

$$Vf_t = \int_0^{h_o} Af_x \cdot dh_x = \int_0^{h_o} \frac{10t}{h_o} \sqrt{\frac{1}{3} S_o \cdot h_x^3} \cdot dh_x$$

$$Vf_t = 4t \cdot h_o \sqrt{\frac{1}{3} S_o \cdot h_o} \quad (8)$$

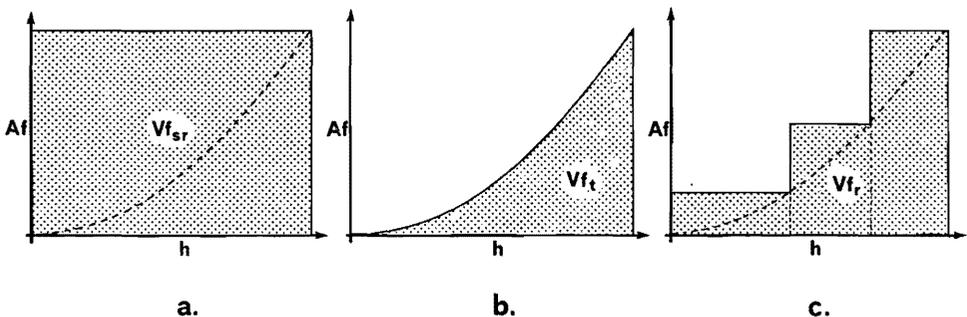


Fig. 3 - Volumi di ferro: a) senza alcuna riduzione; b) teorico; c) con riduzioni dell'armatura.
Iron volumes: a) without any reduction, b) theoretical, c) with some reductions of reinforcement

La (7) e la (8) rappresentano rispettivamente il massimo ed il minimo volume di ferro: dal rapporto $Vf_{sr}/Vf_t = \frac{10}{4}$ si deduce che la quantità di ferro nel caso non si operi alcuna riduzione è pari a 2,5 volte la quantità teorica. Operando invece delle riduzioni il volume di volta in volta necessario (Vf_r) sarà compreso tra i 2 valori suddetti (Fig. 3.c) tendendo al valore teorico man mano che aumenta il valore di n cioè il numero delle riduzioni, tant'è che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n Af_m (h_m - h_{m+1}) = 4t \cdot h_0 \sqrt{\frac{1}{3} S_0 \cdot h_0}$$

Nello specchio sottostante vengono indicati i valori del rapporto Vf_r/Vf_t in funzione del numero delle riduzioni.

n		Vf_r/Vf_t
	nessuna riduzione	2,50
1	riduzione	1,69
2	riduzioni	1,44
3	riduzioni	1,32
4	riduzioni	1,26
5	riduzioni	1,21
6	riduzioni	1,18
7	riduzioni	1,16
8	riduzioni	1,14

4. ASPETTI PRATICI

L'esposizione teorica fin qui illustrata può servire come base per l'elaborazione di una metodologia pratica da impiegarsi nella riduzione dell'armatura.

Occorre innanzi tutto premettere che i valori teorici calcolati di Af_m e h_m difficilmente possono mantenersi nella realtà in quanto i diametri commerciali permettono solo di approssimare la sezione effettiva dell'armatura a quella teorica derivante dai calcoli; lo scarto risulta tuttavia modesto e quindi accettabile.

La metodologia illustrata qui appresso si riferisce ai 2 casi possibili di riduzione dell'armatura e cioè alla riduzione del numero dei ferri ed alla riduzione del diametro degli stessi.

4.1. Riduzione del numero

Può essere attuata quando si ha un numero pari (N) di ferri alla base di modo

che almeno una riduzione possa effettuarsi eliminando un ferro sì ed uno no ⁽³⁾. Nel caso che N sia dispari può attuarsi egualmente prendendo però in esame nei calcoli una lunghezza b di struttura doppia (cioè 200 cm) in modo da agire sempre su un numero di ferri pari (nel caso specifico 2N).

Le riduzioni del numero comportano come conseguenza dimezzamenti successivi dell'area di base Af_0 . (1ª riduzione $\frac{Af_0}{2}$; 2ª riduzione $\frac{Af_0}{4}$; ecc.). In generale, detto m il numero progressivo della riduzione si ha che:

$$Af_m = \frac{Af_0}{2^m} \quad \text{dove} \quad Af_0 = N \frac{\varnothing^2 \cdot \pi}{400}$$

per cui

$$Af_m = \frac{N \cdot \varnothing^2 \cdot \pi}{800m}$$

4.2. Riduzione del diametro

Viene attuato su tutti gli N ferri riducendo nella opportuna sezione il diametro da \varnothing_0 a \varnothing_m (dove $\varnothing_m < \varnothing_0$), scegliendo \varnothing_m fra quelli commerciali più piccoli di \varnothing_0 di modo che:

$$Af_m \leq \frac{N \cdot \varnothing^2 \cdot \pi}{400}$$

4.3. Confronto fra le 2 metodologie

Alla luce delle considerazioni teoriche si può osservare come la riduzione del numero dei ferri sia meno vantaggiosa rispetto a quella del diametro. Questo poiché le varie Af_m sono fissate a priori come dimezzamenti successivi di Af_0 ; si ha quindi un certo scostamento rispetto a quello teorico, scostamento che è tanto più evidente quanto maggiore è il numero delle riduzioni attuate.

Viceversa la riduzione del diametro permette di avvicinarsi maggiormente alle condizioni teoriche in quanto i vari Af_m non sono prestabiliti ma dipendono dalla scelta del \varnothing_m .

Bisogna tuttavia aggiungere che in questo caso occorre tener presente il maggior onere derivante dalle giunzioni dei ferri.

³ Questo sistema permette di mantenere costante la distanza tra i ferri anche dopo le riduzioni e quindi di non squilibrare l'armatura.

5. APPLICAZIONE NUMERICA

Per poter meglio chiarire quanto finora esposto si procede all'applicazione della metodologia in un caso concreto.

Si fa riferimento, allo scopo, ad un muro di sostegno con armatura semplice nel quale si effettuerà la riduzione sia riducendo il N dei ferri sia riducendo il \emptyset . Per ciascuno dei 2 metodi si prende in esame il caso che prevede una sola riduzione e quello con due riduzioni.

5.1. Parametri geometrici e statici

— altezza del muro	$h_0 = 450 \text{ cm}$
— spinta totale	$S_0 = 5200 \text{ kg}$
— braccio della spinta	$y_0 = 150 \text{ cm}$
— coefficiente per il calcolo di progetto dell'armatura di una sezione rettangolare inflessa con armatura semplice (per $K_c = 80 \text{ kg/cm}^2$, per $K_t = 2000 \text{ kg/cm}^2$ e per un rapporto di amplificazione pari a 10).	$t = 0,00177$

5.2. Armatura alla base

Applicando la (1) si avrà:

$Af_0 = 15,36 \text{ cm}^2$ armatura teorica

Scelto $\emptyset_0 = 16 \text{ mm}$, il numero dei ferri risulta:

$$N = \frac{15,36}{\frac{16^2 \pi}{400}} = 7,77 \sim 8 \text{ ferri}$$

L' Af_0 effettiva sarà perciò di $16,08 \text{ cm}^2$.

5.3. Caso di una sola riduzione

5.3.1. Riduzione del numero

Il numero dei ferri viene dimezzato e cioè passa a 4:

$$Af_1 = 8,04 \text{ cm}^2$$

Applicando la (3) si determina l'altezza di riduzione h_1 :

$$h_1 = 289 \text{ cm}$$

Il volume di ferro viene calcolato con la (4):

$$V_f = 4912 \text{ cm}^3$$

5.3.2. Riduzione del diametro

Dalla Tab. 1 si ricava il coefficiente β da utilizzarsi nella relazione (6):

$$A_{f_1} = 6,25 \text{ cm}^2$$

che corrisponde a 8 ferri del $\varnothing 10$ ($A_{f_1} = 6,28 \text{ cm}^2$)

Si calcola con la (3) l'altezza di riduzione h_1 :

$$h_1 = 245 \text{ cm}$$

mentre con la (4) si determina il volume di ferro corrispondente:

$$V_f = 4835 \text{ cm}^3$$

5.4. Caso di 2 riduzioni

5.4.1. Riduzione del numero

La prima riduzione comporta un dimezzamento degli 8 ferri di base per cui si avrà:

$$A_{f_1} = 8,04 \text{ cm}^2$$

$$h_1 = 289 \text{ cm}$$

La seconda riduzione determinerà un successivo dimezzamento per cui rimangono solo 2 ferri:

$$A_{f_2} = 4,02 \text{ cm}^2$$

Applicando rispettivamente la (3) e la (4) si avrà che:

$$h_2 = 182 \text{ cm}$$

$$V_f = 4181 \text{ cm}^3$$

5.4.2. Riduzione del diametro

Dalla Tab. 1 si desume il coefficiente β da applicare nella (6) per cui risulta:

$$A_{f_1} = 9,27 \text{ cm}^2$$

che corrisponde a 8 ferri del $\varnothing 12$ ($A_{f_1} = 9,05 \text{ cm}^2$)

Tale valore sostituito nella (3) permette di ottenere l'altezza ove attuare la prima riduzione

$$h_1 = 312 \text{ cm}$$

Sempre dalla Tab. 1 si ricava il coefficiente β per la 2^a riduzione per cui si avrà:

$$A_{f_2} = 3,71 \text{ cm}^2$$

a cui si può far corrispondere 8 ferri del $\varnothing 8$ ($A_{f_2} = 4,02 \text{ cm}^2$).

Si calcola con la (3) l'altezza della seconda riduzione:

$$h_2 = 182 \text{ cm}$$

Il volume di ferro corrispondente sarà:

$$V_f = 4127 \text{ cm}^3$$

5.5. Risultati e osservazioni

Per poter meglio osservare i risultati, questi vengono raggruppati nella sottostante tabella:

	Nessuna riduzione	1 riduzione			2 riduzioni			Armatura teorica
		Riduzione del N°	Riduzione del \varnothing	Riduzione teorica	Riduzione del N°	Riduzione del \varnothing	Riduzione teorica	
h_0 (cm)	450	450	450	450	450	450	450	450
A_{f_0} (cm ²)	16,08	16,08	16,08	15,63	16,08	16,08	15,63	15,63
h_1 (cm)	—	289	245	244	289	312	318	—
A_{f_1} (cm ²)	—	8,04	6,28	6,25	8,04	9,05	9,27	—
h^2 (cm)	—	—	—	—	182	182	172	—
A_{f_2} (cm ²)	—	—	—	—	4,02	4,02	3,71	—
V_f (cm ³)	7236	4912	4835	4745	4181	4127	4055	2814
Pf (kg)	57	39	38	37	33	32	32	22

La sua analisi permette di osservare come tra i due metodi non vi sia grande differenza nei risultati (almeno per un numero di riduzioni limitato); tale differenza è d'altra parte abbondantemente compensata dal maggior onere che la giunzione dei ferri comporta.

Viceversa occorre sottolineare che tra una sola riduzione e due riduzioni le differenze siano più apprezzabili con uno scarto tra le due di circa 6 kg di ferro per ml. D'altra parte il vantaggio di attuare il maggior numero di riduzioni è in parte attenuato dal maggior onere che le riduzioni stesse comportano.

Appare pertanto sufficiente (considerato anche che nel tipo di struttura preso in esame l'altezza massima non supera normalmente i 5-6 metri) limitare ad 1 o 2 le riduzioni dell'armatura per avere dei concreti risultati di risparmio.

6. CONCLUSIONI

I risultati del presente studio, offrono quindi al progettista una indicazione di metodologia da seguire nella progettazione delle strutture prese in esame, tale da associare un corretto dimensionamento ad un risparmio nei costi. Tale metodologia, limitata ad un tipo particolare di manufatto può, con i dovuti accorgimenti, essere estesa ad altre condizioni statiche e costruttive.

**Tab. 1 - Valori di α e β in funzione di n (numero complessivo delle riduzioni) e m (numero progressivo della riduzione).
 α and β values in function of n (which is the compressive number of reductions) and of m (which is the progressive number of reduction).**

n	1 ^a Riduzione		2 ^a		3 ^a		4 ^a		5 ^a		6 ^a		7 ^a		8 ^a		
	α	β	α	β	α	β	α	β	α	β	α	β	α	β	α	β	
1	0,543	0,400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	0,706	0,593	0,383	0,237	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	0,784	0,694	0,553	0,412	0,300	0,165	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	0,829	0,755	0,650	0,524	0,459	0,311	0,249	0,124	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	0,859	0,796	0,712	0,601	0,558	0,417	0,394	0,248	0,214	0,099	—	—	—	—	—	—	—
6	0,880	0,825	0,756	0,657	0,627	0,496	0,491	0,344	0,347	0,204	0,188	0,082	—	—	—	—	—
7	0,985	0,847	0,788	0,699	0,677	0,557	0,561	0,421	0,440	0,292	0,311	0,173	0,169	0,069	—	—	—
8	0,907	0,865	0,813	0,733	0,715	0,606	0,614	0,482	0,509	0,364	0,399	0,252	0,282	0,150	0,153	0,060	—

SUMMARY

The author examines the theoretical foundations, which control the reinforcement allocation in reinforced concrete cantilever elements subject to decreasing side thrust, in order to propose a practical methodology to individuate the optimal reduction of heights and sections to gain a positive saving of iron.

BIBLIOGRAFIA

- INDELLICATI F., 1965 — Tavole di massima economia della flessione in relazione alla spesa del calcestruzzo e del ferro. (Dispense).
- LEONHARDT F. e MONNING E., 1978 — C.A. & C.A.P.: Calcoli di progetto e tecniche costruttive. Voll. 1, 2 e 3, II^a ed. Edizioni tecniche, Milano.
- DE MONTIS S. e PISANU M., 1979 — Analisi delle prestazioni statiche e dei costi di muri di sostegno in calcestruzzo armato in funzione di alcune caratteristiche dimensionali. *Studi Ssassaresi*, Sez. III - *Annali della Facoltà di Agraria dell'Università di Sassari*, Vol. XXVII.